Proč je $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}$

Petr Olšák `p@o.cz`

Studenti počítačových oborů dnes nemají v osnovách výuky základy matematiky integrálů více proměnných. Dovolil jsem si proto vytvořit tento pamflet, který je výpiskem nejdůležitějších poznatků z této matematické oblasti. Text obsahuje i jednoduché zdůvodnění a nelpí na přesných matematických formulacích. Ty je pak možno dohledat jinde. Studenti jej mohou použít ve výuce počítačové grafiky jako doplňují materiál k problému „integrace na sféře“. V návrzích osnov pro počítačové obory je bohužel kladen důraz jen na „diskrétní“ matematiku a zapomíná se, že problém se často modeluje „spojitou“ matematikou, která je samozřejmě před implementací do počítače diskretizována.

•• Křivkový integrál

V rovině x, y je definována reálná funkce dvou reálných proměnných $f = f(x, y)$ (rozumných vlastností, aby ji bylo možno integrovat jak potřebujeme) a dále je v této rovině nakreslena spojitá křivka φ. Provedeme restrikci definičního oboru f jen na křivku φ a pokusíme se funkci f podél φ integrovat.
• **Představa.** Zkroutíme proužek papíru a přilepíme jej na křivku tak, že je proužek kolmý na vodorovnou rovinu x, y. Pak zastřihneme okraj proužku směřujícího vzhůru podle funkčních hodnot funkce f. Úkolem je spočítat plochu takového proužku papíru. Kdyby měla funkce někde záporné hodnoty, musíme nalepit další proužek papíru směřující dolů pod rovinu a jeho plocha se samozřejmě odečítá.
• **Riemannova definice.** Křivku φ rozdělíme na krátké úseky o velikosti $\triangle\varphi_i$. Tyto velikosti nesmějí přesáhnout zvolenou velikost D. V každém úseku zvolíme libovolný bod a funkční hodnotu funkce f v tomto bodě označíme f_i. Křivkový integrál je pak definován jako

$$\int_\varphi f(x,y)\,\mathrm{d}\varphi = \lim_{D\to 0} \sum f_i \triangle\varphi_i,$$

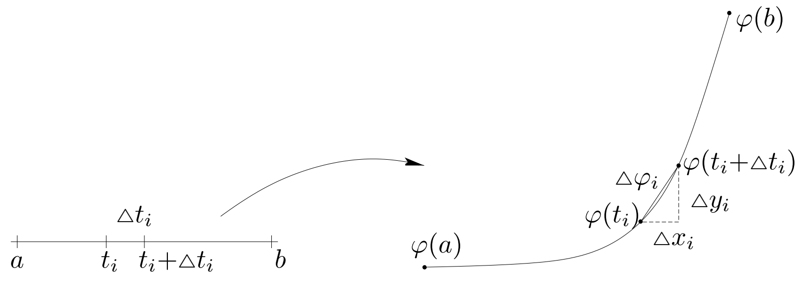
pokud tato limita existuje.
• **Parametrizace křivky.** Zvolíme interval $\langle a, b\rangle$ a křivku popíšeme jako množinu hodnot zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}^2$, tj. $\varphi(t) = [x(t), y(t)]$ pro $t \in \langle a, b\rangle$. Pro jednoduchost neuvádím předpokládané vlastnosti křivky ani uvedeného zobrazení. Rozumná je představa ploteru, který kreslí křivku v čase od výchozího času a po konečný čas b, tj. pro $t \in \langle a, b\rangle$ je hodnota $\varphi(t)$ nějaký bod v rovině x, y, který leží na křivce a pero ploteru se v čase pohybuje spojitě, třebaže různou rychlostí. Bod $\varphi(a)$ je začátek křivky a $\varphi(b)$ je konec křivky.
• **Transformační vorec.** Křivkový integrál se (za určitých předpokladů o funkci f, křivce φ a parametrizaci křivky) dá počítat jako

$$\int_\varphi f(x,y)\,\mathrm{d}\varphi = \int_a^b f\bigl(x(t), y(t)\bigr)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

což už je běžný integrál funkce jedné proměnné. Znaky $\dot{x}(t)$ a $\dot{y}(t)$ jsou derivace příslušných funkcí podle času (proměnné t). Pokusíme se tento vzorec zdůvodnit. Z pohledu Riemannovy definice je třeba sledovat, jak se změní délka úseku na intervalu $\langle a, b\rangle$, (např. konkrétní úsek $\triangle t_i$) vzhledem k délkce odpovídajícího úseku na křivce $\triangle\varphi_i$. Je totiž

$$\sum f_i \triangle\varphi_i = \sum f_i \frac{\triangle\varphi_i}{\triangle t_i} \triangle t_i.$$

Je tedy nutné spočítat poměr $\triangle\varphi_i / \triangle t_i$. Na obrázku jsou vyznačeny body $t_i, t_i + \triangle t_i$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ a jejich odpovídající obrazy.



Díky Pythagorovi vidíme, že $\triangle\varphi_i = \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2}$, takže je

$$\frac{\triangle\varphi_i}{\triangle t_i} = \sqrt{\left(\frac{\triangle x_i}{\triangle t_i}\right)^2 + \left(\frac{\triangle y_i}{\triangle t_i}\right)^2}.$$

Při limitním přechodu pro $D \to 0$ přechází $\triangle x_i/\triangle t_i$ na $\dot{x}(t_i)$ a $\triangle y_i/\triangle t_i$ na $\dot{y}(t_i)$, což vysvětluje transformační vzorec (1).

Pozorný čtenář si všiml drobného zádrhelu. Totiž $\triangle\varphi_i$ se přesně nerovná $\sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2}$, protože (jako v obrázku) daný úsek nemusí být úsečka. Vyrovnat se s touto chybou je technicky složitější. Zůstaneme tedy u toho, že chyba je „menšího řádu“ než počítané hodnoty a při limitním přechodu zmizí úplně. Může posloužit představa, že křivku při počítání součtů podle Riemannovy definice aproximujeme po částech úsečkami $\triangle\varphi_i$ a tato aproximace při limitním přechodu pro $D \to 0$ přechází ve skutečnou křivku φ.

• **Křivkové integrály druhého druhu.** Výše uvedený křivkový integrál se někdy nazývá *integrál prvního druhu*. Integrálem druhého druhu pak není plocha papírového proužku (z naší představy), ale průmět tohoto proužku na stínítko procházející osami x, z nebo na stínítko obsahující osy y, z. Představme si 3D scénu s naším důvěrně známým proužkem papíru nalepeným na křivku. Scéna je nasvětlena nekonečně vzdáleným zdrojem světla s paprsky rovnoběžnými s osou y, resp. rovnoběžnými s osou x. Existují tedy dva integrály druhého druhu (podle zvoleného stínítka a směru paprsků). Plochu proužku papíru je ovšem nutno orientovat a počítat „kladný“ a „záporný“ stín. Dopadají-li paprsky na lícovou stranu proužku papírku, plochu stínu přičítáme. Je-li osvětlena rubová strana proužku papíru, plochu stínu odečítáme. Stín na stínítku může být vícenásobný, pak se stíny vzájemně odečítají a přičítají podle výše uvedeného pravidla. Zkuste si rozmyslet, jak to funguje pro spirálu. V některých fyzikálních aplikacích se křivkové integrály druhého druhu vyskytují, proto uvedu (už bez odvozování) transformační vzorce:

$$\int_\varphi f(x,y)\,\mathrm{d}\varphi_x = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\,\dot{x}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_\varphi f(x,y)\,\mathrm{d}\varphi_y = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\,\dot{y}\,\mathrm{d}t.$$

•• Plošný integrál

V prostoru je definována reálná funkce tří reálných proměnných $f = f(x,y,z)$ (rozumných vlastností, aby ji bylo možno integrovat jak potřebujeme) a dále je v tomto prostoru vymezena plocha S. Provedeme restrikci definičního oboru f jen na plochu S a pokusíme se funkci f podél S integrovat.

• **Riemannova definice.** Plochu S rozdělíme na malé plošky S_i o velikosti $\triangle S_i$. Největší vzdálenosti dvou bodů v každé jednotlivé plošce nesmějí přesáhnout stanovenou velikost D. Z každé plošky vybereme jeden (libovolný) bod a označíme funkční hodnotu funkce f v tomto bodu znakem f_i. Plošný integrál je pak definován jako

$$\int_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{D\to 0} \sum f_i \triangle S_i,$$

pokud tato limita existuje.

• **Parametrizace plochy.** Zvolíme obdélník $O = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ a plochu popíšeme jako množinu obrazů prostého zobrazení $S : O \to \mathbf{R}^3$, tj. $S(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$ pro $u \in \langle a,b\rangle$, $v \in \langle c,d\rangle$. Plocha je tedy určena třemi funkcemi x,y,z, každá funkce má dvě proměnné. Předpokládá se, že lze funkce x,y,z derivovat jednak podle u a jednak podle v (s výjimkou konečně mnoha bodů). Těmto derivacím, kdy některou proměnnou považujeme za konstantu (parametr) a podle jiné derivujeme, říkáme *parciální derivace* a značíme $\frac{\partial x}{\partial u}$, tj. parciální derivace funkce x podle proměnné u. Podobně $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, atd. Také plocha S musí mít rozumné vlastnosti. „Nerozumný“ je například Möbiův list: prstýnek z proužku papíru který byl před slepením překlopen, tj. lícová strana proužku přechází v rubovou.

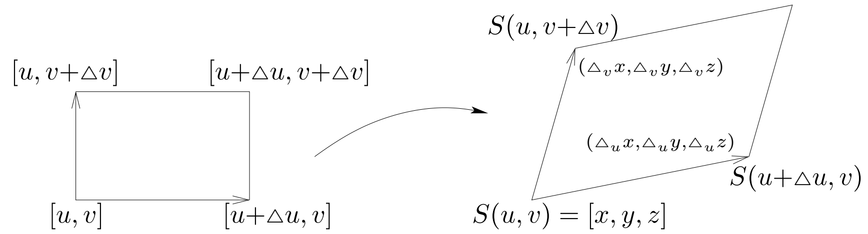
• **Transformační vzorec.** Plošný intergrál se (za určitých předpokladů o funkci f, ploše S a parametrizaci plochy) dá počítat jako

$$\int_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_O f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{2}$$

což je dvojný integrál funkce dvou proměnných (u,v), na který lze použít Fubiniovu větu (viz dále). Přitom funkce A, B, C jsou determinanty parciálních derivací, které se počítají takto:

$$A = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad B = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad C = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Uvedený transformační vzorec si nyní zdůvodníme. Ze stejného důvodu jako u křivkového integrálu musíme při transformaci hledat poměr $\triangle S_i$ ku $\triangle[u_i, v_i]$. Symbolem $\triangle[u_i, v_i]$ zde rozumíme plochu obdélníčku o stranách $\triangle u_i$, $\triangle v_i$ a symbol $\triangle S_i$ označuje plochu jeho obrazu. Obraz S_i aproximujeme rovnoběžníkem proloženým body $S(u,v)$, $S(u+\triangle u, v)$, $S(u, v+\triangle v)$. K faktu, že skutečná ploška S_i se tomuto rovnoběžníku přesně nerovná, učiním stejnou nepřesnou poznámku, jako jsem vyslovil u křivkového integrálu: po limitním přechodu se chyba vytratí. Na obrázku je vyznačen jednak obdélníček $\triangle[u_i, v_i]$ a jednak aproximace jeho obrazu. Index i je vynechán. Rovnoběžník vpravo je umístěn v třírozměrném prostoru, takže vyznačené vektory mají tři složky, které jsou označeny $(\triangle_u x, \triangle_u y, \triangle_u z)$ a $(\triangle_v x, \triangle_v y, \triangle_v z)$.



Plocha rovnoběžníka v prostoru se počítá dle známého vzorce z lineární algebry jako velikost vektorového součinu $(\triangle_u x, \triangle_u y, \triangle_u z) \times (\triangle_v x, \triangle_v y, \triangle_v z)$ a znovu z lineární algebry víme, že velikost takového vektorového součinu lze počítat jako $\sqrt{D_{y,z}^2 + D_{x,z}^2 + D_{y,z}^2}$, kde

$$D_{y,z} = \det \begin{pmatrix} \triangle_u y & \triangle_v y \\ \triangle_u z & \triangle_v z \end{pmatrix}, \quad D_{x,z} = \det \begin{pmatrix} \triangle_u x & \triangle_v x \\ \triangle_u z & \triangle_v z \end{pmatrix}, \quad D_{x,y} = \det \begin{pmatrix} \triangle_u x & \triangle_v x \\ \triangle_u y & \triangle_v y \end{pmatrix}.$$

Poměr ploch obrazu ku vzoru vzhledem k naší transformaci tedy je

$$\frac{\sqrt{D_{y,z}^2 + D_{x,z}^2 + D_{y,z}^2}}{\triangle u \triangle v} = \sqrt{\left(\frac{D_{y,z}}{\triangle u \triangle v}\right)^2 + \left(\frac{D_{x,z}}{\triangle u \triangle v}\right)^2 + \left(\frac{D_{y,z}}{\triangle u \triangle v}\right)^2}.$$

Protože

$$\frac{D_{y,z}}{\triangle u \triangle v} = \det \begin{pmatrix} \triangle_u y/\triangle u & \triangle_v y/\triangle v \\ \triangle_u z/\triangle u & \triangle_v z/\triangle v \end{pmatrix}$$

(a podobně pro ostatní dva determinanty), přechází poměr ploch při $D \to 0$ v $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, což zdůvodňuje transformační vzorec.

• **Poznámka.** V některých tabulkách je možné najít ve vzorci (2) místo výrazu $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ výraz $\sqrt{EF-H^2}$, kde

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad F = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \quad H = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Prostým (i když poněkud zdlouhavým) výpočtem se dá ověřit, že $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{EF-H^2}$.

• **Plošný integrál druhého druhu.** Výše uvedený integrál je nazýván *plošným integrálem prvního druhu.* Ve fyzice se někdy též pracuje s *plošnými integrály druhého druhu*:

$$I_{y,z} = \int_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_{y,z} = \iint_O f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) A \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

a podobně další integrály druhého druhu $I_{z,x}$, $I_{x,y}$. Jedná se o průměty, ovšem lidská představivost pokulhává, neboť k tomu potřebujeme vrhat stíny ve 4D scéně a počítat jejich „orientované objemy“. Je to analogické, jako u křivkového integrálu, ale je zde jedna dimenze navíc.

•• Příklad: integrace na hemisféře

Nechť S je povrch koule o poloměru 1 se středem v bodě $[0,0,0]$ a S_1 je průnik S s poloprostorem $P = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; z \geq 0\}$, tj. S_1 je „horní polovina“ sféry. Budeme integrovat funkci $f = f(x,y,z)$ na S_1. Provedeme parametrizaci S_1 (tzv. sférické souřadnice):

$$x(\theta,\phi) = \sin\theta\cos\phi, \quad y(\theta,\phi) = \sin\theta\sin\phi, \quad z(\theta,\phi) = \cos\theta, \qquad \theta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle, \quad \phi \in \langle 0, 2\pi).$$

K odvození těchto vzorců využijte obrázku z libovolné učebnice o grafice a všimněte si, že výška bodu $[x, y, z]$ na sféře (tedy z) je rovna $\cos\theta$. Všechny body na S_1 se stejnou výškou tvoří kružnici o poloměru $r = \sin\theta$, takže $[x, y] = [r\cos\phi, r\sin\phi]$.

Zavedeme označení $O = \langle 0, \pi/2\rangle \times \langle 0, 2\pi)$ a použijeme vzorec (2):

$$\int_{S_1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}\omega = \iint_O f\big(x(\theta,\phi), y(\theta,\phi), z(\theta,\phi)\big)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi.$$

Protože

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi,\quad \frac{\partial x}{\partial\phi} = -\sin\theta\sin\phi,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = \cos\theta\sin\phi,\quad \frac{\partial y}{\partial\phi} = \sin\theta\cos\phi,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta} = -\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\phi} = 0,$$

je

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} =$$

$$= \sqrt{\det\begin{pmatrix}\cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi\\ -\sin\theta & 0\end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi\\ -\sin\theta & 0\end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi\end{pmatrix}^2} =$$

$$= \sqrt{\sin^4\theta\cos^2\phi + \sin^4\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\theta} = \sqrt{\sin^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta$$

a odtud plyne odpověď na otázku v názvu tohoto textíku, že je $\mathrm{d}\omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$.

•• Dvojný integrál, Fubiniova věta

V rovině x, y je vymezena oblast Ω, jejíž hranice je uzavřená křivka. Na Ω je definována reálná funkce dvou proměnných $f = f(x, y)$. Tuto funkci budeme integrovat přes Ω.

• **Představa.** Uvažujme těleso se základnou Ω, které má stěny podél hranice Ω kolmé k rovině x, y. „Střecha“ tohoto tělesa kopíruje funkční hodnoty funkce f. Objem takového tělesa je dvojný integrál funkce f přes Ω. Má-li funkce f záporné hodnoty, pak objem tělesa pod rovinou x, y je nutno odečíst.

• **Riemannova definice.** Viz definici plošného integrálu, kdy speciálně $S = \Omega$. Uvedeme příklad rozdělení Ω na plošky, které vyhovuje podmínce o vzdálenosti dvou bodů menší než D: uvažujme čtvercovou síť se stranami čtverce $\triangle x = \triangle y = D/2$ a uvažujme jen ty čtverce, které mají s Ω neprázdný průnik. Hledané plošky S_i jsou buď celé čtverce (pokud leží uvnitř Ω), nebo to jsou průniky čtverců s Ω (pokud se jedná o „hraniční čterce“). Vně Ω dodefinujeme funkci f hodnotou 0 (to nebude mít vliv na hodnotu integrálu) a v případě „hraničních čtverců“ volme funkční hodnotu bodu vně Ω, tedy $f_i = 0$. Do součtu tedy tyto čtverce nepřispívají žádnou hodnotou a můžeme je při sčítání (níže) ignorovat. Vnitřní čtvece mají všechny stejnou plochu $\triangle S_i = \triangle x\triangle y$, takže podle definice je dvojný integrál roven

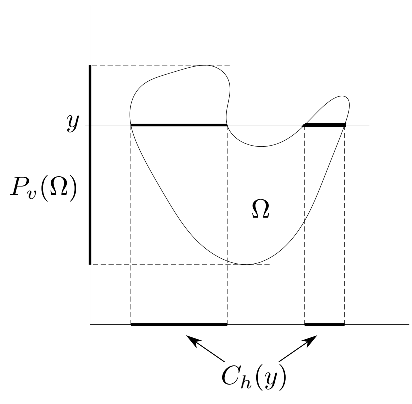
$$\int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{D\to 0}\sum f_i\triangle x\triangle y$$

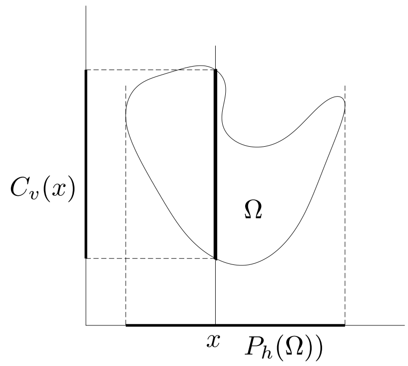
• **Idea Fubiniovy věty.** Objem tělesa uvedeného výše v odstavci „představa“ lze počítat tak, že těleso rozřežeme na tenké plátky (jako šunku) ve směru osy x, spočítáme obsah každého plátku (vnitřní integrál), tyto obsahy vynásobíme tloušťkou plátku ($\triangle y$) a sečteme (vnější integrál). Téhož výsledku dosáhneme, pokud těleso krájíme ve směru osy y na plátky.

• **Popis řezů množiny Ω.** Označím $P_v(\Omega)$ průmět množiny Ω na vertikální osu (tj. osu y) a $C_h(y)$ je horizontální řez množiny Ω vedený bodem y. Podobně $P_h(\Omega)$ je průmět množiny Ω na horizontální osu (tj. osu x) a $C_v(x)$ je vertikální řez množiny Ω vedený bodem x. Přesněji

$$P_v(\Omega) = \{y;\ \exists x \text{ takové, že } [x, y] \in \Omega\}, \qquad C_h(y) = \{x;\ [x, y] \in \Omega\}$$

a podobně pro $P_h(\Omega)$ a $C_v(x)$ (viz obrázky).





• **Fubiniova věta.** Pokud všechny uvedené integrály existují, pak je

$$\int_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{P_v(\Omega)} \left(\int_{C_h(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{P_h(\Omega)} \left(\int_{C_v(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Fubiniova věta tedy převádí dvojný integrál na postupné počtání dvou integrálů funkce jedné proměnné. Například při výpočtu vnitřního integrálu podle dx považujeme proměnnou y funkce f za parametr a teprve při výpočtu vnějšího integrálu se tato proměnná projeví.

• **Speciální případ.** Oblast Ω je obdélník se stranami rovnoběžnými s osami, tedy $\Omega = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Pak $P_v(\Omega) = \langle c, d\rangle$, $C_h(y) = \langle a, b\rangle$ pro všechna $y \in \langle c, d\rangle$. Také $P_h(\Omega) = \langle a, b\rangle$, $C_v(x) = \langle c, d\rangle$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Tvrzení Fubiniovy věty má pak tvar:

$$\int_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{4}$$

což je případ, který využijeme při výpočtu plošného integrálu po transformaci podle vzorce (2). Pokud integrujeme přes obecnou oblast Ω, můžeme dodefinovat funkci f vně oblasti nulou a uzavřít oblast Ω do nějakého obdélníka, který ji obsahuje. Pak lze integrovat přes obdélník, takže se často Fubiniova věta zmiňuje jen v jednodušším tvaru (4). Ovšem při skutečném výpočtu integrálu přes obecnou oblast musíme nakonec výše uvedené řezy vždy vyčíslit.

• **Příklad.** Pokračujeme příkladem integrace na hemisféře.

$$\int_{S_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= \iint_O f\big(x(\theta,\phi), y(\theta,\phi), z(\theta,\phi)\big) \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} f\big(x(\theta,\phi), y(\theta,\phi), z(\theta,\phi)\big)\,\mathrm{d}\phi \right) \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

• **Substituce ve dvojném integrálu.** Nechť $G : \Omega \to \mathbf{R}^2$ je prosté zobrazení (dvou proměnných na dvě proměnné), tj. $G(u, v) = [x(u, v), y(u, v)]$. Pak za předpokladu existence uvedených dvojných integrálů je

$$\iint_{G(\Omega)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} f\big((x(u,v), y(u,v)\big)|C|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kde C je determinant ze vzorce (3), kterému se v tomto kontextu říká *jacobián.* Vzorec je důsledkem vzorce (2), když volíme $z(u, v) = 0$. Pak totiž je $A = 0$, $B = 0$ a $\sqrt{C^2} = |C|$. Tento vzorec lze snadno zobecnit na substituci v n-násobném integrálu. Lze ukázat, že pro prosté zobrazení G je jacobián na celé Ω buď nezáporný nebo nekladný, takže lze absolutní hodnotu buď umazat nebo nahradit násobením hodnotou -1. Substituce ve dvojném integrálu se někdy hodí při výpočtu integrálu před použitím Fubiniovy věty.